Πιθανότητες

10/12

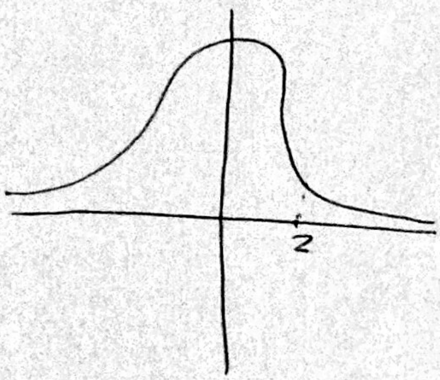
Παράδειγμα

$Z \sim N(0,1)$

α) $P(Z \leq z) = 0,95$

β) $P(Z \geq z) = 0,6772$

Λύση



α. $P(Z \leq z) = 0,95 = P(-\infty < Z < z) = P(-\infty < Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq z) =$

$= 0,5 + P(0 \leq Z \leq z) \Rightarrow P(0 \leq Z \leq z) = 0,95 - 0,5 = 0,45 \Rightarrow$

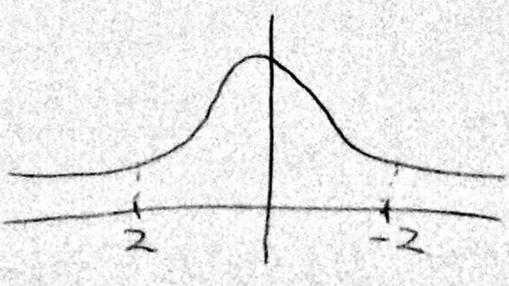
$\Rightarrow z = 1,65$

β. $P(Z \geq z) = 0,6772$

$0,6772 = P(Z \geq z) = P(-\infty < Z < -z) = P(-\infty < Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq -z)$

$= 0,5 + P(0 \leq Z \leq -z) \Leftrightarrow P(0 \leq Z \leq -z) = 0,6772 - 0,5 = 0,1772$

$\Rightarrow -z = 0,46 \Rightarrow z = -0,46$



$z \leq 0$

Υπολογισμός Πιθανοτήτων για $N(\mu, \sigma^2)$

Για α, β γνωστά και $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad P(\alpha \le X \le \beta) = ?$

Απάντηση: Χρησιμοποιώ τον τυπικό μετασχηματισμό

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma} < Z < \frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)$$

όπου $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Παράδειγμα

Επίδοση σε μάθημα $\sim N(5,1)$

α) P(επίδοση μεταξύ 4 και 6)

β) Αν είναι γνωστό η επίδοση να είναι >5 ποια η πιθανότητα να είναι >6?

γ) Ποια τουλάχιστον επίδοση περιμένω να συμβεί με πιθανότητα ίση με 0,9?

Λύση

Έστω X παριστά την επίδοση

α. $P(4 \le X \le 6) = P\left(\frac{4-5}{1} \le \frac{X-5}{1} \le \frac{6-5}{1}\right) = P(-1 \le Z \le 1) =$

$\overset{\sim N(0,1)}{=} 2P(0 \le Z \le 1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$

β. $P(X>6 \,/\, X>5) = \frac{P(X>6 \text{ και } X>5)}{P(X>5)} = \frac{P(X>6)}{P(X>5)}$

$P(X>6) = P\left(\frac{X-5}{1} > \frac{6-5}{1}\right) = P(Z>1) = 1 - P(Z \le 1) =$

$= 1 - [0,5 + P(0 \le Z \le 1)] = 0,5 - P(0 \le Z \le 1) = 0,5 - 0,3413$

$P(X>5) = P(Z>0) = 0,5$

Άρα $P(X>6 / X>5) = 0,3174$

γ) Έστω τουλάχιστον x η επίδοση που δίνει πιθανότητα ίση με 0,9

$$0,9 = P(X \geq x) = P\left(\frac{X-5}{1} \geq \frac{x-5}{1}\right) = P(Z \geq x-5) =$$

$$= P(Z \leq -(x-5)) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq -(x-5)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(0 \leq Z \leq -(x-5)) = 0,4 \Rightarrow -(x-5) = 1,28 \Rightarrow x = 3,72$$

$\boxed{\text{ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6}}$

Χαρακτηριστικά τ.μ. και Κατανομών

1) Μέση ή Αναμενόμενη τιμή τ.μ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.μ. Χ. Η μέση ή αναμενόμενη τιμή της τ.μ. Χ συμβολίζεται με μ ή $E(X)$ και ορίζεται:

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_x x\, P_X(x) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx & , X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Η μέση τιμή ∃, αν ∃ το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα.

Ερμηνεία μέσης τιμής (μ.τ.)

(A) Έστω διακριτή τ.μ X με τιμές $x_1, \dots, x_n$ και σ.π. $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $i = 1, \dots, n$ (ομοιόμορφη διακριτή)

Έστω $x_{min} = \min\{x_1, \dots x_n\}$

$x_{max} = \max\{x_1, \dots x_n\}$

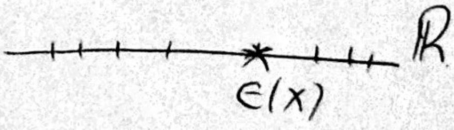
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} x_{max} P_X(x_i) = x_{max} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)}_{1}$$

$\Rightarrow E(X) \leq x_{max}$ (1)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} x_{min} P_X(x_i) = x_{min} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P_X(x_i)}_{1}$$

$\Rightarrow E(X) \geq x_{min}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow x_{min} \leq E(X) \leq x_{max}$

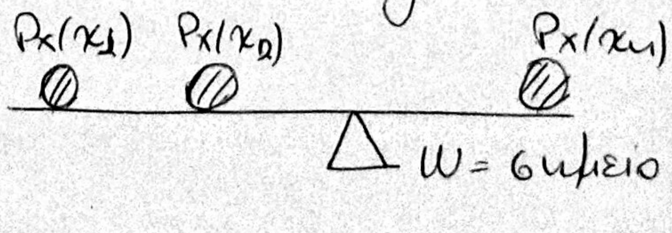


(B) Έστω X με τιμές $\{x_1, \dots, x_n\}$ και $P_X(x_i) = \frac{1}{n}$ $\forall i = 1, \dots n$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \bar{x}$$

(Γ) Σύνδεση $E(X)$ με το κέντρο βάρους

Έστω τ.μ X με τιμές $\{x_1, \dots, x_n\}$ και σ.π $P_X(x_i)$ $i = 1, \dots n$



w = σημείο ισορροπίας.

Αφού w είναι σημείο ισορροπίας η ολική στροφή στρέψης = 0

Ολική ροπή στρέψης $= \sum_{i=1}^{n} (w - x_i) P_X(x_i) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} x_i P_X(x_i) = E(X)$

Παράδειγμα

Ζάρι ρίχνεται 2 φορές

X = άθροισμα αποτελέσματος 2 ρίψεων

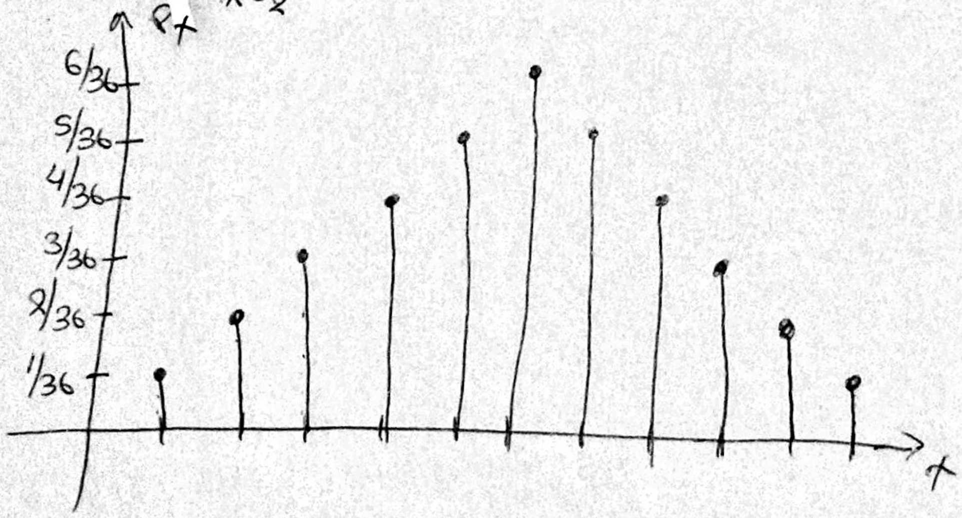
Y = απόλυτη τιμή διαφοράς των 2 ρίψεων

$E(X) = ?$, $E(Y) = ?$

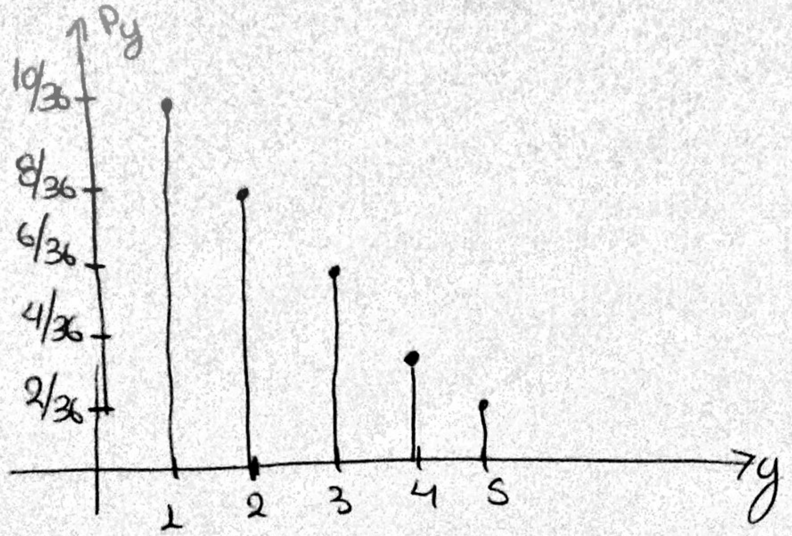
Λύση

Τιμή X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πιθανότητα	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$E(X) = \sum_{x=2}^{12} x P_X(x) = 7$



Τιμή Y	0	1	2	3	4	5
Πιθανότητα	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36



ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω συνεχής τ.μ X με σ.π.π f_X συμμετρική γύρω από το $a \in \mathbb{R}$ / $f_X(x+a) = f_X(a-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχει η $E(X)$ τότε $E(X) = a$

Απόδειξη

Εφαρμογή αλλαγής μεταβλητών στο ολοκλήρωμα.

Μαθηματική Παρέμβαση

Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω τ.μ X και έστω $g(x)$ μια συνάρτηση της τ.μ X. Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της $g(x)$ ορίζεται:

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x) P_X(x) & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω τ.μ X και πραγματικές συναρτήσεις g, g_1, g_2.
Έστω σταθερές a και b. Αν οι μέσες τιμές υπάρχουν τότε:

α) $E(a) = a$

β) $E[ag(x)+b] = aE[g(x)] + b$

γ) $E[ag_1(x)+bg_2(x)] = aE[g_1(x)] + bE[g_2(x)]$

δ) Αν $g(x) \geq 0$ τότε $E[g(x)] \geq 0$

ε) Αν $g_1(x) \geq g_2(x)$ τότε $E[g_1(x)] \geq E[g_2(x)]$

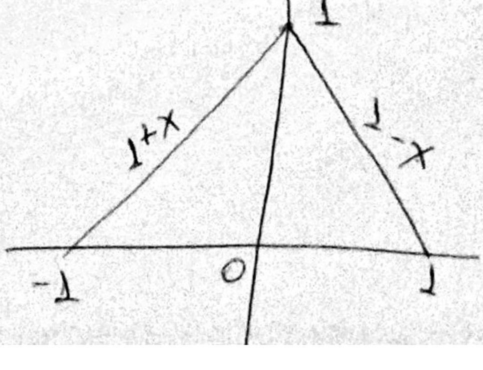
$\boxed{\text{Απόδειξη}}$ β)

$$E[ag(x)+b] =: \int_{-\infty}^{+\infty} (ag(x)+b) f_X(x)\,dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx + b\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx}_{1} = aE[g(x)] + b$$

Παράδειγμα

Έστω τ.μ με τριγωνική κατανομή

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & , -1 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$



$E(X) = ?$

Λύση

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 < x < 0 \\ 1-x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x f_X(x) dx + \int_{0}^{1} x f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\, dx = 0$$